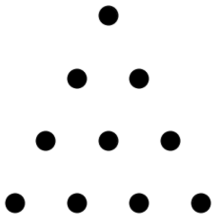
Syllabus spelen met kwadraten (nationale wiskunde dagen 2011)
Van steentjeswiskunde tot Euler

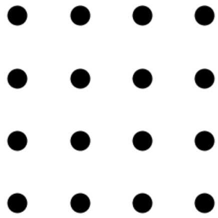
1 Steentjes wiskunde (Bron: A.W. Grootendorst, Grepen uit de geschiedenis van de wiskunde)

De oude Grieken bedreven de wiskunde ook wel met steentjes, in het Latijn *calculi*.
Je herkent het nog in het woord calculator.

Met steentjes leg je mooie patronen:



driehoeksgetal

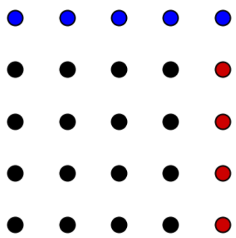


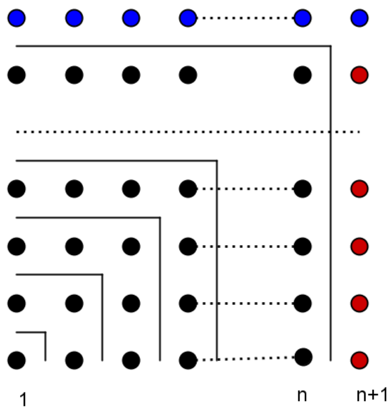
kwadraat

Kwadraat betekent vierkant. Dat is nu wel heel duidelijk te zien.
Een driehoeksgetal met n rijen geven we aan met $D(n)$, en kwadraat met $K(n)$.
Hierboven staan dus $D(4) = 10$ en $K(4) = 16$.

1.1 n^2 is de som van de eerste n oneven getallen

Hoe je bij het volgende kwadraat komt, kan nu zonder woorden:





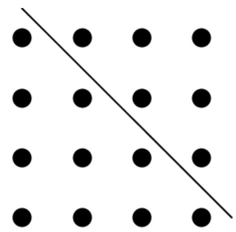
of algemener:

$n^2 + n + (n + 1) = (n + 1)^2$

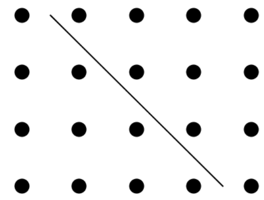
Begin je met één steentje, dan zie je
$1^2 = 1$
$2^2 = 1 + (1+2) = 1 + 3$
$3^2 = 2^2 + (2 + 3) = 1 + 3 + 5$
enzovoort

In woorden: **het kwadraat van *n* is de som van de eerste *n* oneven getallen**.
We zullen zien dat Fibonacci in zijn bewijs eigenlijk alleen maar deze eigenschap gebruikt.

Met de steentjeswiskunde kun je ook eenvoudig aantonen dat de som van twee opeenvolgende driehoeksgetallen een kwadraat is.



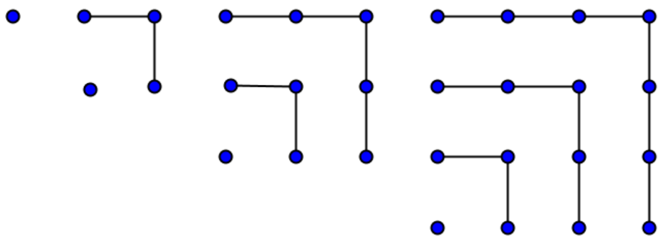
De som van de getallen 1 tot en met n kun je in beeld brengen door naast het patroon voor n^2 nog een kolom van n steentjes te zetten en en de figuur in twee gelijke driehoeksgetallen te verdelen.



Je leest af: $2 \times (1 + 2 + \ldots + n) = n(n + 1)$. of ook:
$1 + 2 + \ldots. + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

1.2 Som van kwadraten

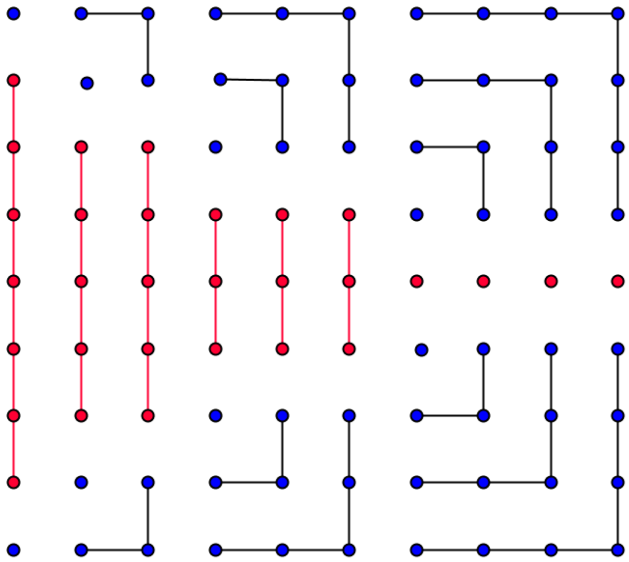
Ook de som van de kwadraten is te vinden met steentjeswiskunde.



Als voorbeeld $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

De figuur bestaat uit 4 punten, 3 haken met 3 punten, 2 haken met 5 punten en 1 haak met 7 punten.

Recept:
- trek de haken recht en plaats ze verticaal onder de figuur
- spiegel de figuur in een horizontale as en plak hem eronder.



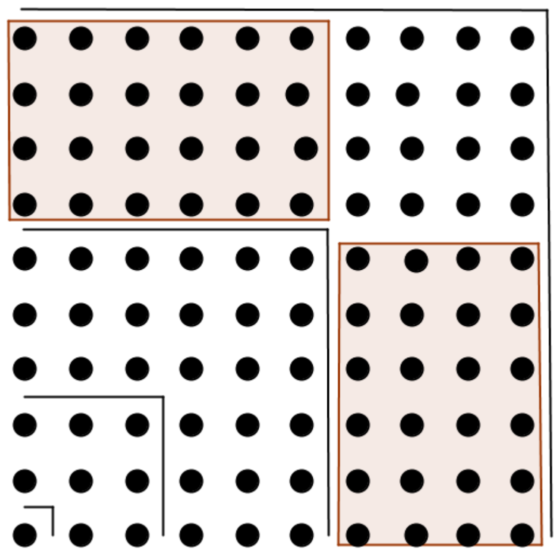
Je leest af:
- de breedte: 1 + 2 + 3 + 4
- de hoogte (links): 4 + 4 + 1

Dus: $3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) =$
$(1 + 2 + 3 + 4) \cdot (4 + 4 + 1)$

Algemeen: $3(1^2 + 2^2 + \ldots.. + n^2) = (1 + 2 + \ldots.+ n)(n + n + 1) = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$
Delen door 3 geeft de ons bekende formule:
$1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
N.B. Voor het rekenen is het makkelijker $2n + 1$ te lezen als $n + (n + 1)$.

1.3 Som van derde machten

De formule voor de som van derde machten krijg je als volgt:



1 2 3 4

Zet de haken na achtereenvolgens 1 steentje, 2 steentjes, 3 steentjes,…., n steentjes .

Het gebied tussen de haken na n – 1 en n valt in drie stukken uiteen:

De twee gelijke stukken zijn rechthoeken met zijden van n en $D(n – 1)$ steentjes en bevatten dus elk $n \cdot D(n – 1)$ steentjes.
Het derde stuk bevat n^2 steentjes.

Samen dus

$\{D(n – 1) + n + D(n – 1)\}\ n =$
$\{D(n) + D(n – 1)\} \cdot n = n^2 \cdot n = n^3$ steentjes.

Je ziet: $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

1.4 Formules construeren

1.4.1 *De som van kwadraten*

Vaak worden somformules bewezen met volledige inductie.
Maar ze zijn ook wel construeerbaar.

We construeren de formules voor $\sum_1^n k^2$ en $\sum_1^n k^3$.

We kunnen de rij kwadraten opvatten als verschilrij van derde machten.

Afleiding somformule voor kwadraten

Om van n^3 naar $(n + 1)^3$ te komen moet je er $3n^2 + 3n + 1$ bij doen.

Beginnen we bij 1 dan moeten we om bij $(n + 1)^3$ te komen er $\sum_1^n (3k^2+3k+1)$ bij doen.

Dus $1 + \sum_1^n (3k^2+3k+1) = (n + 1)^3$.

$$(n + 1)^3 = 1 + 3\cdot\sum_1^n k^2 + 3\cdot\sum_1^n k + \sum_1^n 1 = 1 + 3\cdot\sum_1^n k^2 + 3 \cdot \tfrac{1}{2}n(n + 1) + n.$$

$$\begin{aligned}3\cdot\sum_1^n k^2 &= (n + 1)^3 – 1\tfrac{1}{2}n(n + 1) – (n + 1)\\ &= (n + 1)\{(n + 1)^2 – 1\tfrac{1}{2}n – 1\ \}\\ &= (n + 1)(n^2 + \tfrac{1}{2}n\} = \tfrac{1}{2}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

Dus $\sum_1^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

1.4.2. *Afleiding somformule voor derdemachten*

Voor de derde (en volgende machten gaat het net zo:

Om van n^4 naar $(n + 1)^4$ te komen moet je er $4n^3 + 6n^2 + 4n + 11$ bij doen.

Daaruit volgt dat $1 + \sum_1^n (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) = (n + 1)^4$.

$$(n + 1)^4 = 1 + 4\cdot\sum_1^n k^3 + 6\cdot\sum_1^n k^2 + 4\cdot\sum_1^n k + \sum_1^n 1$$

$$= 1 + 4\cdot\sum_1^n k^3 + n(n + 1)(2n + 1) + 2n(n + 1) + n.$$

$$4\cdot\sum_1^n k^3 = (n + 1)^4 - n(n + 1)(2n + 1) - 2n(n + 1) - (n + 1)$$

$$= (n + 1)^4 - n(n + 1)(2n + 1) - (2n + 1)(n + 1)$$

$$= (n + 1)^4 - (2n + 1)(n + 1)^2$$

$$= (n + 1)^2 \{(n + 1)^2 - 2n - 1\} = n^2(n + 1)^2$$

dus $\sum_1^n k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$

Op zo'n manier vind je:

$$\sum_1^n k = \tfrac{1}{2} n(n+1)$$

$$\sum_1^n k^2 = \tfrac{1}{3} n(n+1)(n+\tfrac{1}{2}) \quad \text{of} \quad \sum_1^n k^2 = \tfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

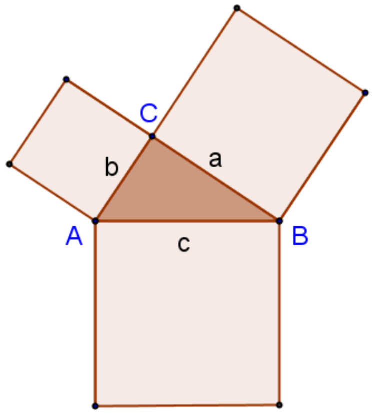
$$\sum_1^n k^3 = \tfrac{1}{4} n^2(n+1)^2$$

$$\sum_1^n k^4 = \tfrac{1}{5} n(n+1)(n+\tfrac{1}{2})(n^2+n-\tfrac{1}{3}) \quad \text{of} \quad \sum_1^n k^4 = \tfrac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

$$\sum_1^n k^5 = \tfrac{1}{6} n^2(n+1)^2(n^2+n-\tfrac{1}{2}) \quad \text{of} \quad \sum_1^n k^5 = \tfrac{1}{12} n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

2 Pythagoreïsche drietallen

Weinig wiskunde is zo algemeen bekend als de stelling van Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$.
Een bewijs van de stelling vind je al in de Elementen van Euclides (300 v. Chr.), boek I, stelling 47.



Als a, b en c bovendien gehele getallen zijn, vormen zij een *pythagoreïsch drietal*.

Met steentjeswiskunde kun je ook al pythagoreïsche drietallen vinden. Je gebruikt dat n^2 de som is van de eerste n oneven getallen:

Schrijf de oneven getallen op tot je een kwadraat tegen komt: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$
Omdat $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ vind je $4^2 + 3^2 = 5^2$

Euclides geeft in de Elementen, boek X, stelling 28 een meer algemene manier om pythagoreïsche drietallen te vinden. Die is gebaseerd op de volgende gelijkheid:

$$(a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2 \text{, immers } \begin{array}{l}(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\end{array}$$

Als je er voor zorgt dat ook $4ab$ een kwadraat is, heb je een pythagoreïsch drietal.
Dat is het simpelst door voor a en b kwadraten te nemen. Dus stel $a = m^2$ en $b = n^2$, dan is $4ab = 4m^2n^2 = (2mn)^2$ een kwadraat en $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ een pythagoreïsch drietal.

Door m en n ($m > n$) relatief priem te nemen en $m - n$ oneven, vind je zogenaamde *primitieve* pythagoreïsche drietallen (drietallen die geen gemeenschappelijke factor hebben).

Noot: Euclides neemt voor x en y zogenaamde gelijkvormige rechthoeksgetallen.
Een rechthoeksgetal is een getal van de vorm $l \cdot b$ (lengte maal breedte).
Gelijkvormige rechthoeksgetallen horen bij gelijkvormige rechthoeken.
Kies $x = l \cdot b$ en $y = kl \cdot kb$, met k, l en b geheel, dan is $xy = k^2l^2b^2$ inderdaad een kwadraat.

De eerste 15 primitieve pythagoreïsche drietallen zijn

m	n	$m^2 - n^2$	$2mn$	$m^2 + n^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37

m	n	$m^2 - n^2$	$2mn$	$m^2 + n^2$
6	5	11	60	61
7	2	45	28	53
7	4	33	56	65
7	6	13	84	85
8	1	63	16	65
8	3	55	48	73
8	5	39	80	89
8	7	15	112	113

Dat je op deze manier alle primitieve drietallen vindt, vereist nog een bewijs.

Veel gemak heb je daarbij van de volgende stellingen:

a. *Het kwadraat van een even natuurlijk getal is deelbaar door 4.*
Een even getal is van de vorm $2k$. Het kwadraat is van de vorm $4k^2$, dus deelbaar door 4.

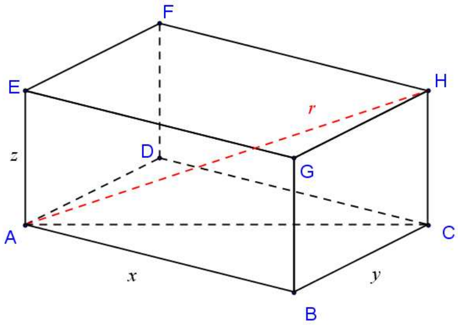
b. *Het kwadraat van een oneven getal geeft bij deling door 4 rest 1.*
Een oneven getal is van de vorm $2k + 1$. Het kwadraat is dan
$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$, dus bij deling door 4 rest 1.

En bij een volgend onderwerp kunnen we gebruik maken van een nog iets sterkere uitspraak:
c. *Het kwadraat van een oneven getal geeft bij deling door 8 rest 1.*
Immers $k^2 + k = k(k + 1)$ is altijd even (of k of $k +1$ is even).

Nu het bewijs van de stelling, dat alle primitieve drietallen van de vorm
$(m^2 – n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ zijn.
We gaan uit van drie gehele getallen a, b en c, die geen gemeenschappelijke factor hebben en waarvoor geldt: $a^2 + b^2 = c^2$.

1 Als twee van de drie getallen een gemeenschappelijke factor, zeg k, hebben, is het derde getal ook deelbaar door k. Als $a = kx$ en $b = ky$ dan $c^2 = k^2(x^2 + y^2)$.
2. a en b zijn niet beide even. Immers dan moet c ook even zijn en hebben a, b en c in elk geval de factor 2 gemeen.
3. a en b zijn niet beide oneven, want dan zou c^2 bij deling door 4 rest 2 geven en dat kan niet. Stel a oneven en b even. c is dan ook oneven.
4. $b^2 = c^2 – a^2 = (c + a)(c – a)$; $c + a$ en $c – a$ zijn beide even.
Kies $p = \frac{1}{2}(c + a)$ en $q = \frac{1}{2}(c - a)$. Dan $c = p + q$ en $a = p – q$
5. p en q hebben geen gemeenschappelijke factor.
Immers, indien wel, dan zouden c en a ook een gemeenschappelijke factor hebben.
Maar omdat $b^2 = pq$, betekent dat dat p en q allebei kwadraten zijn.
Laat $p = m^2$ en $q = n^2$, dan is $(a, b, c) = (m^2 – n^2, 2mn, m^2 + n^2)$

3 Pythagoras in de ruimte



Breid je de stelling van Pythagoras uit naar de ruimte, bijvoorbeeld om de afstand tussen twee punten te berekenen – de diagonaal van een balk - , dan kom je de formule $x^2+y^2+z^2=r^2$ tegen.

Laten we eens kijken of die formule ook oplossingen in gehele getallen heeft.

We zoeken weer naar primitieve oplossingen.

1. Zijn x, y en z alle drie even, dan is r ook even en hebben we geen primitieve oplossing
2. Zijn x, y en z alle drie oneven, dan zou r^2 bij deling door 4 rest 3 opleveren. Dat kan niet.
3. Als twee van de drie oneven zijn, zou r^2 bij deling door 4 rest 2 opleveren. Dat kan niet.
   Conclusie: twee van de drie zijn even en één oneven.
4. Stel x en y even, dan z en r oneven: $x^2+y^2=r^2-z^2$.
   Omdat r^2 en z^2 beide rest 1 geven bij deling door 8, is $r^2 - z^2$ deelbaar door 8.
   Dus ook $x^2 + y^2$ is deelbaar door 8.
   Dan is ook $x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$ deelbaar door 8 en moet
   $x + y$ deelbaar zijn door 4.
5. $x^2+y^2=r^2-z^2=(r+z)(r-z)$

Recept:

- Kies twee even getallen x en y met $x + y = 4$.
- Ontbind $x^2 + y^2$ in twee even factoren a en b ($a > b$): $r + z = a$ en $r - z = b$.
  Optellen respectievelijk aftrekken geeft: $r=\frac{1}{2}(a+b)$ en $z=\frac{1}{2}(a-b)$.
  Om te zorgen dat r en z oneven zijn, mogen $a - b$ en $a + b$ *niet* deelbaar zijn door 4.
  Kies daarom a of b van de vorm $4k$ en de ander van de vorm $4k + 2$.
  Voor primitieve oplossingen moet je zorgen dat ½a en ½b relatief priem zijn.

De eerste 15 pythagoreïsche viertallen zijn:

$x+y$	x	y	x^2+y^2	a	b	z	r	*viertal*
4	2	2	8	2	4	1	3	**2,2,1,3**
8	2	6	40	2	20	9	11	**2,6,9,11**
				4	10	3	7	**2,6,3,7**
	4	4	32	2	16	7	9	**4,4,7,9**
12	2	10	104	2	52	25	27	**2,10,25,27**
				4	26	11	15	**2,10,11,15**
	4	8	80	2	40	19	21	**4,8,19,21**
				8	10	1	9	**4,8,1,9**
	6	6	72	2	36	17	19	**6,6,17,19**
				4	18	7	11	**6,6,7,11**
16	2	14	200	2	100	49	51	**2,14,49,51**
				4	50	23	27	**2,14,23,27**
	4	12	160	2	80	39	41	**4,12,39,41**
	6	10	136	2	68	33	35	**6,10,33,35**
	8	8	128	2	64	31	33	**8,8,31,33**

4 Derde machten

Sinds 1994 weten we dat $x^n + y^n = z^n$ geen geheeltallige oplossingen heeft voor $n > 2$.
En dat is bijzonder, want als je het rijtje van derde machten opschrijft:

$1^3 = 1$	$6^3 = 216$
$2^3 = 8$	$7^3 = 343$
$3^3 = 27$	$8^3 = 512$
$4^3 = 64$	$9^3 = 729$
$5^3 = 125$	$10^3 = 1000$

dan zie je dat $6^3 + 8^3 = 728$, dus bijna gelijk aan $729 = 9^3$.

In elk geval volgt daaruit dat $x^3 + y^3 + z^3 = r^3$ in elk geval één geheeltallige oplossing heeft: het viertal (1, 6, 8, 9). De vraag is: zijn er meer en zo ja, hoe vind je ze.

Uit hetzelfde rijtje kun je nog een tweede halen: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.
(zou nu ook $3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 = 7^4$? Helaas: $81 + 256 + 625 + 1296 = 2258 \neq 2401$)

Op deze oplossing baseerde de geniale Indiase wiskundige Ramanujan (1887 – 1920) zijn algemene oplossing:

$$x = 3n^2 + 5mn - 5m^2 \qquad z = 5n^2 - 5mn - 3m^2$$
$$y = 4n^2 - 4mn + 6m^2 \qquad t = 6n^2 - 4mn + 4m^2$$

Ramanujan was een selfmade wiskundige, die door de beroemde Engelse wiskundige Hardy naar Engeland werd gehaald. Ramanujan had een fabelachtig inzicht in getallen.
Er is een beroemd verhaal over Ramanujan en derdemachten. Hardy zocht hem eens op in het ziekenhuis en merkte op dat het nummer van zijn taxi, 1729, niet zo interessant was. Onmiddellijk zei Ramanujan: “Dat is juist een heel interessant getal, want het is het kleinste getal dat op twee manieren kan worden geschreven als som van twee derde machten: $1779 = 12^3 + 1^3 = 9^3 + 10^3$. Sindsdien heet 1729 een taxicab-getal. Taxicab(n) is het kleinste getal dat op n manieren geschreven kan worden als som van twee derde machten.

Er zijn 6 Taxicabgetallen bekend:
Taxicab(1) = $2 = 1^3 + 1^3$
Taxicab(2) = $1729 = 12^3 + 1^3 = 9^3 + 10^3$
Taxicab(3) = $87\,539\,319 = 167^3 + 436^3 = 228^3 + 423^3 = 255^3 + 414^3$
Taxicab(4) = $6\,963\,472\,309\,248 = 2421^3 + 19083^3 = 5436^3 + 18948^3$
$= 10200^3 + 18072^3 = 13322^3 + 16630^3$
Taxicab(5) = $48\,988\,659\,276\,962\,496 = 38787^3 + 365757^3 = 107839^3 + 362753^3$
$= 205292^3 + 342952^3 = 221424^3 + 336588^3 = 231518^3 + 331954^3$
Taxicab(6) = $24\,153\,319\,581\,254\,312\,065\,344 = 582162^3 + 28906206^3$
$= 3064173^3 + 28894803^3 = 8519281^3 + 28657487^3 = 16218068^3 + 27093208^3$
$= 17492496^3 + 26590452^3 = 18289922^3 + 26224366^3$.
(zie ook het artikel van Alexander van den Brandhof over Taxicabgetallen op kennislink)

Een andere formule voor het vinden van oplossingen is
(gevonden in een Belgisch wiskundeboek: Argument getallenleer deel 3)
$(9x^4-3x)^3+(9x^3-1)^3+(9x^3+1)^3=(9x^4+3x)^3$
x = 1 geeft: 6, 8, 10, 12 of ook 3, 4, 5, 6
x = 2 geeft 138, 71, 73 en 150

De complete rationale oplossing van dit probleem wordt gegeven door:
(Hardy &Wright, The theory of numbers, blz 200)

$$x=\lambda(1-(a-3b)(a^2+3b^2))$$
$$y=\lambda((a+3b)(a^2+3b^2)-1)$$
$$z=\lambda((a^2+3b^2)^2-(a+3b))$$
$$r=\lambda((a^2+3b^2)^2-(a-3b))$$

Voorbeeld: kies a = 1, b = 1; je vindt: $x = 9\lambda$, $y = 15\lambda$, $z = 12\lambda$ en $r = 18\lambda$
Kies je $\lambda=\frac{1}{3}$, dan vind je de primitieve oplossing (3, 5, 4, 6).

5 Sommen van opeenvolgende kwadraten

In 1995 ontdekte ik bij toeval dat $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$
Nu weet iedereen dat $3^2 + 4^2 = 5^2$
Zou daar iets tussen zitten met 5 opeenvolgende kwadraten?
Een beetje zoeken leverde: $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$

Zou er voor elk natuurlijk getal n een $(2n + 1)$-tal opeenvolgende getallen te vinden zijn, zodat de som van de kwadraten van de eerste $n + 1$ gelijk is aan de som van de kwadraten van de laatste n?

Het gaat om de oplossing van de vergelijking:
$a^2 + (a + 1)^2 + ... + (a + n)^2 = (a + n + 1)^2 + \ldots + (a + 2n)^2$

Handiger is te zoeken naar een getal a zo, dat

$(a - n)^2 + \ldots + (a - 1)^2 + a^2 = (a + 1)^2 + \ldots (a + n)^2$

Als je de haakjes uitwerkt en vereenvoudigt, zie je dat alle termen a^2 op één na wegvallen en zo ook de kwadraten van 1 tot en met n. Je houdt alleen de dubbele producten over:

$-2(1 + 2 + \ldots + n)a + a^2 = 2(1 + 2 + \ldots + n)a$
$a^2 = 4(1 + \ldots + n)a$ delen door x en gebruik van de somformule geeft:
$a = 4 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = 2n(n + 1)$ 4 maal het n-de driehoeksgetal!

$n = 1$ geeft $a = 4$, dus 3, 4 en 5
$n = 2$ geeft $a = 12$, dus 10, 11, 12 en 13, 14
$n = 3$ geeft $a = 24$, dus 21, 22, 23, 24 en 25, 26, 27
$n = 4$ geeft $a = 40$, dus 36, 37, 38, 39, 40 en 41, 42, 43, 44
…………………………………
$n = 10$ geeft: $a = 220$, dus:
$210^2 + 211^2 + 212^2 + \ldots + 220^2 = 221^2 + 222^2 + \ldots + 230^2$.

Voor de som S aan weerskanten geldt:
$2S = (a - n)^2 + \ldots + (a + n)^2$

Werk je de haakjes uit dan vallen nu de dubbele producten weg. Je houdt over:
$2S = (2n + 1)a^2 + 2(1^2 + \ldots + n^2) = (2n + 1) \cdot 4n^2(n + 1)^2 + \frac{1}{3}n(n + 1)(2n + 1)$
$= \frac{1}{3}n(n + 1)(2n + 1) \{12n(n + 1) + 1\}$, dus

$S = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1) \{12n(n + 1) + 1\}$ = (som eerste n kwadraten)$(12n(n + 1) + 1)$

6 De Arithmetika van Diophantos van Alexandrië

Over Diophantos is niet veel bekend. Hij zou geleefd hebben in de derde eeuw. Zijn beroemdste boek is de Arithmetika. Dat werk bestaat uit 13 delen die uiteindelijk allemaal bewaard zijn gebleven. Daarin behandelt hij een aantal algebraïsche problemen, met name over kwadraten en derdemachten.

Telkens formuleert hij een vraagstuk en geeft dan een voorbeeld van een oplossing.
Hij geeft dus geen algemene bewijs. Diophantos bedoelt met ‘getal’ altijd een positief *rationaal* getal.

Twee voorbeelden uit boek II: vraagstuk 6 en vraagstuk 8

Vraagstuk 6: *Vind twee getallen met een gegeven verschil, zodat het verschil van hun kwadraten een gegeven getal meer is dan het gegeven verschil.*

Zij v het gegeven verschil en g het gegeven getal, dan zoekt hij dus twee getallen, zeg a en b, met $a < b$ met $b - a = v$ en $b^2 - a^2 = v + g$.

Oplossing voor $v = 2$ en $g = 20$:
$b = a + 2$ en $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) = 2(2a + 2) = 22$
Daaruit volgt: $a = 4\frac{1}{2}$ en $b = 6\frac{1}{2}$

Vraagstuk 8: *Verdeel een kwadraat in twee kwadraten.*

Anders geformuleerd: vind de oplossing van $x^2 + y^2 = z^2$ voor gegeven z.

Oplossing voor $z^2 = 16$:
Laat x^2 één van de gezochte kwadraten, dan is $16 - x^2$ ook een kwadraat zijn.
Neem een kwadraat van de vorm $(mx - 4)^2$, bijvoorbeeld $(2x - 4)^2$.
Laat $(2x - 4)^2 = 16 - x^2$, dan moet $4x^2 - 16x = -x^2$ of wel $x(5x - 16) = 0$, dus $x = \frac{16}{5}$.
Je vindt: $x = \frac{256}{25}$ en $y = \frac{144}{25}$.

Opmerking

1 Je vindt deze oplossing ook via $3^2 + 4^2 = 5^2$, $(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = 1$ en $\left(\frac{3a}{5}\right)^2 + \left(\frac{4a}{5}\right)^2 = a^2$.

2 Het was bij dit vraagstuk dat Fermat schreef dat hij had bewezen dat

> Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere; cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Vrij vertaald:
Het is onmogelijk een derdemacht te splitsen in twee derdemachten, of een vierde macht in twee vierdemachten of in het algemeen elke macht hoger dan 2 in twee machten van dezelfde graad. Ik heb een echt schitterend bewijs gevonden, maar de marge is te klein om dat te bevatten.

Ofwel: er zijn geen rationale getallen x, y en z waarvoor geldt: $x^n + y^n = z^n$ voor $n > 2$.

7 Sommen van kwadraten

(met dank aan André vd Berg, die over dit onderwerp een les gaf bij mijn 25-jarig jubileum als wiskundedocent)

7.1 Sommen van twee kwadraten

De opdracht aan de klas luidt: vind alle getallen kleiner dan 50 die te schrijven zijn als som van twee kwadraten.

Het levert het volgende lijstje:

2	$1^2 + 1^2$	**13**	$3^2 + 2^2$	**26**	$5^2 + 1^2$	**40**	$6^2 + 2^2$
4	$2^2 + 0^2$	**16**	$4^2 + 0^2$	**29**	$5^2 + 2^2$	**41**	$5^2 + 4^2$
5	$2^2 + 1^2$	**17**	$4^2 + 1^2$	**32**	$4^2 + 4^2$	**45**	$6^2 + 3^2$
8	$2^2 + 2^2$	**18**	$3^2 + 3^2$	**34**	$5^2 + 3^2$	**49**	$7^2 + 0^2$
9	$3^2 + 0^2$	**20**	$4^2 + 2^2$	**36**	$6^2 + 0^2$	**50**	$7^2 + 1^2$
10	$3^2 + 1^2$	**25**	$5^2 + 0^2$	**37**	$6^2 + 1^2$		$5^2 + 5^2$
			$4^2 + 3^2$				

Kun je een systeem ontdekken zodat je kunt voorspellen welke getallen wel en welke niet als som van twee kwadraten zijn te schrijven?

Kijk eerst eens naar de priemgetallen in het rijtje: je vindt: 2, 5, 13, 17, 29, 37 en 41.
En dus niet: 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43 en 47
Als je 2 buiten beschouwing laat, zie je misschien dat de priemgetallen in zowel het eerste als het tweede rijtje steeds 4, 8 of 12 verschillen: in het eerste rijtje zijn de oneven priemgetallen van de vorm $4k + 1$, in het tweede rijtje van de vorm $4k + 3$ (of $4k – 1$).

Inderdaad kun je bewijzen (Fermat deed dat als eerste), dat elk priemgetal van de vorm $4k + 1$ geschreven kan worden als som van twee kwadraten.

Verder geldt dat als twee getallen x en y te schrijven zijn als som van twee kwadraten, ook xy geschreven kan worden als som van twee kwadraten (Fibonacci, Liber Quadratorum, stelling 6) , want er geldt:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$$

Zo is $34 = 2 \cdot 17 = (1^2 + 1^2)(4^2 + 1^2) = (1 \cdot 1 + 1 \cdot 4)^2 + (1 \cdot 4 - 1 \cdot 1)^2 = 5^2 + 3^2$

Ben je bekend met complexe getallen, dan kun je $a^2 + b^2$ en $c^2 + d^2$ opvatten als kwadraten van de absolute waarden van de complexe getallen $\alpha = a + b\mathrm{i}$ en $\beta = c + d\mathrm{i}$.
Omdat $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ volgt:
$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i})|^2 = |$
$(ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$

Omdat je de kwadraten tussen haakjes kunt verwisselen, kun je vaak meerdere oplossingen vinden.

Voorbeeld
$65 = 5 \cdot 13 = (2^2 + 1^2)(3^2 + 2^2) = (2 \cdot 2 + 1 \cdot 3)^2 + (2 \cdot 3 - 1 \cdot 2)^2 = 7^2 + 4^2$, maar ook
$(1^2 + 2^2)(3^2 + 2^2) = (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3)^2 + (1 \cdot 3 - 2 \cdot 2)^2 = 8^2 + 1^2$

7.2 Sommen van vier kwadraten

Getallen van de vorm $4k + 3$ kunnen niet als som van twee kwadraten worden geschreven. Immers een kwadraat is of deelbaar door 4 of geeft bij deling door 4 rest 1.
Dus de som van twee kwadraten is nooit van de vorm $4k + 3$.

Hoeveel kwadraten heb je dan nodig voor een priemgetal van de vorm $4k + 3$?
De priemgetallen 3, 11, 19 en 43 kun je als som van drie kwadraten schrijven en de priemgetallen 7, 23, 31 en 47 niet.

De getallen in beide rijtjes verschillen steeds een achtvoud. De getallen in het eerste rijtje geven bij deling door 8 rest 3 en die in het tweede rijtje bij deling door 8 rest 7.
Omdat een kwadraat bij deling door 8 rest 0, 1 of 4 oplevert, kun je een getal van de vorm $8k + 7$ nooit als som van drie kwadraten schrijven.

Gauss bewees dat elk getal, niet van de vorm $4^n \cdot (8k + 7)$, te schrijven is als som van drie kwadraten.

Eerder bewees Lagrange in 1770 dat elk getal te schrijven is als som van maximaal vier kwadraten. In zijn bewijs kon hij zich beperken tot ieder *priemgetal*, want Euler had eerder aangetoond, dat als twee getallen geschreven kunnen worden als som van vier kwadraten, hun product ook als som van vier kwadraten kan worden geschreven. Er geldt namelijk:

$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) =$
$(ap - bq - cr - ds)^2 + (aq + bp + cs - dr)^2 + (ar - bs + cp + dq)^2 + (as + br - cq + dp)^2$

> Om deze regel af te leiden kun je gebruik maken van *quaternionen*, een uitbreiding van de complexe getallen. Naast **i** zijn er de getallen **j** en **k**.
> Een quaternion is een getal van de vorm $\alpha = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ met
> $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -1$, waaruit volgt dat
> $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i}$ en $\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j}$
>
> Met $\alpha = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ en $\beta = p + q\mathbf{i} + r\mathbf{j} + s\mathbf{k}$ en $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$
> vind je bovenstaande betrekking.

Schrijf 1001 (= $7 \cdot 11 \cdot 13$) als som van vier kwadraten.
$7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$; $11 = 3^2 + 1^2 + 1^2$ $(+ 0^2)$ en $13 = 3^2 + 2^2$ $(+0^2 + 0^2) = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$

Met de regel van Euler vind je eerst
$7 \cdot 11 = (6 - 1 - 1 - 0)^2 + (2 + 3 + 0 - 1)^2 + (2 - 0 + 3 + 1)^2 + (0 + 1 - 1 + 3)^2 =$
$4^2 + 4^2 + 6^2 + 3^2$
Nogmaals die regel toegepast op 77 en 13 geeft
$1001 = (12 - 8)^2 + (8 + 12)^2 + (18 + 6)^2 + (-12 + 9)^2 = 4^2 + 20^2 + 24^2 + 3^2$

Verwissel je de kwadraten in de verschillende factoren, dan vind je ook de volgende viertallen:

31	6	2	0	27	12	8	8	24	19	8	0	22	20	9	6
30	10	1	0	26	18	1	0	24	18	10	1	22	18	12	7
30	9	4	2	26	17	6	0	24	17	10	6	22	16	15	6
30	8	6	1	26	15	10	0	24	16	13	0	21	20	12	4
30	7	6	4	26	15	8	6	24	16	12	5	20	18	14	9
29	12	4	0	26	12	10	9	24	15	10	10	18	18	17	8
28	12	8	3	25	18	6	4	25	15	14	2	18	16	15	14
28	10	9	6	25	14	12	6	23	20	6	6				
27	16	4	0	24	20	5	0	23	18	12	2				

Erg praktisch is die methode niet. Zelfs met gebruik van een spreadsheet is het een heel karwei vanwege de vele mogelijke combinaties.

Als de getallen niet te groot zijn, is de volgende methode redelijk snel en zomaar door leerlingen toe te passen. Voorbeeld: schrijf 2012 als som van maximaal vier kwadraten.

- Neem het grootste kwadraat kleiner dan 2012: $44^2 = 1936$.
  Als je geluk hebt, dan kun je wat overblijft schrijven als som van maximaal 3 kwadraten.
  Hier is dat zo: nog over 76. Dat kun je schrijven als som van drie kwadraten: $6^2 + 6^2 + 2^2$.

(Heb je dat geluk niet, dan probeer je het met het op één na grootste kwadraat kleiner dan 2012, enzovoort. De stelling geeft je de garantie dat je een viertal zult vinden.)

Hadden we deze procedure toegepast op 1001, dan hadden we $31^2 + 40 = 31^2 + 6^2 + 2^2$ gevonden, of misschien $30^2 + 10^2 + 1^2$.

7.3 Sommen van driehoeksgetallen

Elk getal is te schrijven als som van maximaal drie driehoeksgetallen.

Bewijs (Beukers, Getaltheorie voor beginners, blz 122)
Kies een getal n.
Het getal $8n + 3$ kan geschreven worden als som van drie kwadraten.
Omdat kwadraten bij deling door 8 rest 0, 1 of 4 opleveren zijn die kwadraten oneven:

$8n + 3 = a^2 + b^2 + c^2$ met $a = 2x + 1$, $b = 2y + 1$ en $c = 2z + 1$
$= (2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 + (2z + 1)^2$
$= 4x^2 + 4x + 4y^2 + 4y + 4z^2 + 4z + 3$

$$n = \tfrac{1}{2}x(x+1) + \tfrac{1}{2}y(y+1) + \tfrac{1}{2}z(z+1) = D(x) + D(y) + D(z)$$

Cauchy bewees in 1825 dat elk natuurlijk getal te schrijven is als som van k k-hoeksgetallen.
(Beukers, Getaltheorie voor beginners, blz 123)

8 Som van de kwadraten van de cijfers

1. Kies een positief geheel getal.
2. Bereken de som van de kwadraten van de cijfers.
3. Herhaal dit tot er 1 of 4 uit komt.
   Bij 1 blijft het 1; bij 4 kom je in een cyclus terecht: 4-16-37-58-89-145-42-20-4

Bewijs:
Je toont eerst aan dat je in de rij van een getal *n* groter dan 4 een getal kleiner dan *n* tegenkomt.

1. Dat geldt zeker voor $n > 1000$:
   Voor een getal tussen 1000 en 10000 is de hoogst bereikbare som: $9^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2$ en dat is 324. Voor getallen boven de 10 000 geldt dat natuurlijk nog sterker.
   Algemeen: voor $10^k < n < 10^{k+1}$ is de hoogst bereikbare som: $(k + 1) \cdot 9^2$.
   $(k + 1) \cdot 9^2 < 10^{k+1} – 1$ geeft $k > 3$.
2. De hoogst bereikbare som voor $n < 1000$ is $9^2 + 9^2 + 9^2 = 243$.
   Je kunt je dus beperken tot getallen ≤ 243
3. De hoogst bereikbare som voor $n \leq 243$ is $1 + 9^2 + 9^2 = 163$; dus $n \leq 163$
   Voor $100 < n < 163$ geeft alleen 159 een som boven de 100: 107, maar die is kleiner dan 159. Blijft over $n < 100$. Die moeten we per stuk controleren. Weggelaten zijn de getallen die in één stap kleiner worden of waarvan je de cijfers kunt wisselen naar een kleiner getal.

1	1
2	4-cyclus
3	9-81-65-61-37 → 4
4	4
5	25-29-85-89-→4
6	36-45-41-17-50-25 → 5
7	49-97-130-10-1
8	64-52-29 → 5
9	81 → 3
14	17 → 6
15	26-40-16 → 4
16	→ 4
17	→ 6
18	65 → 3
19	82-68-100-1
25	→ 5
26	→ 15
27	53-34-25
28	68-100-1
29	→ 5
36	→ 6
37	→ 4
38	73-58 → 4
39	90-81 → 3
46	52 → 8
47	65 → 3
48	80-64 → 8
49	→ 7
56	61 → 3
57	74-65 → 3
58	→ 4
59	106 → 16→ 4
66	-72-53
67	-85 → 5
68	100-1
69	117-51
77	98-145 → 4
78	113-11
79	130-10
88	128-69
89	→ 4
99	-162-41

Interessanter is het probleem van Collatz, ook wel het Syracuseprobleem genoemd.

1. Kies een positief geheel getal.
2. Als het even is, deel het door 2.
3. Als het oneven is, vermenigvuldig het met 3 en tel daar 1 bij op.
4. herhaal de stappen 2 en 3 totdat er 1 uit komt.
   (na 1 krijg je de cylus 1 – 4 – 2 – 1)

Het vermoeden is, dat er altijd 1 uitkomt, maar dat is niet bewezen, maar er is tot op heden ook geen tegenvoorbeeld gevonden, terwijl het voor alle getallen tot ongeveer $5 \cdot 10^{18}$ is gecontroleerd. Heb je even tijd, start dan eens met 27.

9 Het *Liber Quadratorum* van Fibonacci

Liber Quadratorum

Inleiding

Liber Quadratorum is geschreven in 1225 door Leonardo Pisano (Leonardo van Pisa, meer bekend als Fibonacci, 1170 - 1250).

Van Fibonacci is niet veel meer bekend dan hij zelf in een korte biografie in zijn Liber Abaci vermeld:

(*Naar de Engelse vertaling van de Liber Abaci door E.L. Sigler*)
"Toen mijn vader een overheidsambtenaar was, ver van huis, in het douanekantoor in Bugia, daar gevestigd voor de handelaren uit Pisa die daar vaak samenkwamen, had hij me als jongen meegenomen om voor mij een nuttige en comfortabele toekomst te zoeken. Hij wilde dat ik me verdiepte in de wiskunde en daarin enige tijd werd onderwezen. Toen ik daar in de kunst van de negen Indische cijfers werd onderwezen, boeide mij dat boven al het andere. En ik leerde van iedereen, die daarin geleerd had op mijn zakenreizen naar Egypte, Syrië, Griekenland, Sicilië en de Provence."

Later terug in Pisa, werd Leonardo verbonden aan het hof van Frederick II (1194 – 1250), keizer van het Heilige Romeinse Rijk. Frederick II werd "stupor mundi" (verbijstering van de wereld) genoemd vanwege de geleerdheid en pracht en praal van zijn hof en zijn eigen leergierigheid en eruditie. Zelf sprak hij bijvoorbeeld zes talen vloeiend.

Aan dat hof hoorde hij het vraagstuk dat aanleiding is geweest tot het schrijven van het *Liber Quadratorum*: vind een kwadraat zodat dat kwadraat vermeerderd of verminderd met 5 weer een kwadraat oplevert. Hij was zo enthousiast over zijn vondst dat het kwadraat van n de som is van de eerste n oneven getallen, dat hij niet alleen het vraagstuk daarmee oploste maar ook een aantal bekende problemen, vaak verwant met het type dat door Diophantus van Alexandrië (250 na Chr.) werd bestudeerd, van een nieuw bewijs voorzag.

In 1862 werd de Latijnse tekst uitgegeven door Baldassarre Boncompagni, die het manuscript vond in de Biblioteca Ambrosiana in Milaan, waar het vele jaren onopgemerkt had gelegen. Die tekst is in het Engels vertaald en becommentarieerd door L.E. Sigler en in 1987 uitgegeven door Academic Press in Florida (ISBN 0-12-643130-2).

Leonardo maakt gebruik van de meetkundige algebra zoals Euclides die presenteert in zijn Elementen. Soms verbaas je je over de ingewikkeldheid van zijn argumenten. Zijn meetkundige notatie (getallen zijn lengtes van lijnstukken, kwadraten soms oppervlaktes van vierkanten) zijn soms behulpzaam, maar al snel grijp je naar pen en papier om een en ander in algebraïsche vorm op te schrijven. Niettemin zijn Leonardo's meesterschap en handigheid met de weerbarstige algebra indrukwekkend.

De bewijzen van de stellingen in deze syllabus zijn gebaseerd op de uitleg van Fibonacci, maar wel in een moderne wiskundige notatie en terminologie.

Het Boek van de Kwadraten

Proloog

Nadat ik door Meester Dominick naar Pisa was gebracht, naar de voeten van uw hemelse majesteit, aller glorierijkste prins, Heer F. (Frederick II), ontmoette ik Meester John van Palermo. Hij gaf mij een vraagstuk dat bij hem opgekomen was en betrekking had op zowel meetkunde als rekenkunde: vind een kwadraat waaruit, als er vijf bij opgeteld of van afgetrokken wordt, altijd een kwadraat voortkomt.

Afgezien van dit vraagstuk, waarvan ik de oplossing al gevonden had, zag ik bij nader inzien, dat de oplossing zelf en vele andere hun oorsprong hebben in de kwadraten en de getallen tussen de kwadraten. Toen ik recent hoorde van een bericht uit Pisa en een ander van het keizerlijk hof dat uwe doorluchte majesteit zich verwaardigd had mijn boek over getallen te lezen, en dat het u plezier deed naar verschillende details op gebied van meetkunde en getallen te luisteren, herinnerde ik me het mij in uw hof door uw wetenschapper gestelde vraagstuk. Ik heb het onderwerp ter hand genomen en begon dit werk, dat ik het *Liber Quadratorum* wil noemen, ter ere van U te schrijven. Ik moet verzoeken om toegeeflijkheid als het op enige plaats iets meer of minder bevat dan dat juist of noodzakelijk is; want alles onthouden en geen fouten maken is eerder goddelijk dan menselijk; en niemand is onfeilbaar of overal voorzichtig genoeg.

Introductie

Ik heb nagedacht over de oorsprong van alle kwadraten en ontdekte dat zij voortkomen uit de oplopende rij van oneven getallen; want de eenheid is een kwadraat en vandaar uit wordt het eerste kwadraat gemaakt, namelijk 1; tel je bij deze eenheid 3 op, dan maak je het tweede kwadraat, namelijk 4, met wortel 2; als je bij de som een derde oneven getal, namelijk 5, optelt, dan krijg je het derde kwadraat, namelijk 9 met wortel 3. en zo ontstaan sommen van oneven getallen en rijen van kwadraten altijd samen in volgorde.

Stelling 1

Vind twee kwadraten die samen een kwadraat vormen.

Idee: Kies een oneven kwadraat, bijvoorbeeld 9.

$(1 + 3 + 5 + 7) + 9 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$ of wel $4^2 + 3^2 = 5^2$

Varianten

- Neem een even kwadraat, bijvoorbeeld 36
  Halveer: 18
  Neem de oneven getallen rond 18: 17 en 19
  $(1 + 3 + \ldots + 15) + (17 + 19) = 1 + 3 + \ldots + 19$ of wel $8^2 + 6^2 = 10^2$

- Neem een oneven kwadraat, deelbaar door 3, bijvoorbeeld 81
  Deel door 3: 27
  Neem de oneven getallen rond 27: 25 en 29
  $(1 + 3 + \ldots + 23) + (25 + 27 + 29) = 1 + 3 + \ldots + 29$ of wel $12^2 + 9^2 = 15^2$

- Zo kun je ook doen met vier opeenvolgende oneven getallen waarvan de som een kwadraat is.

Stelling 2

Elk kwadraat is gelijk aan het voorgaande kwadraat plus de som van de wortels.

$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = n^2 + n + (n+1)$

Gevolgen:

Een kwadraat is gelijk aan het tweede voorafgaande kwadraat plus 4 maal de wortel van het tussenliggende kwadraat: $(n+2)^2 = n^2 + 4(n+1)$.

- Een kwadraat is gelijk aan een kleiner kwadraat plus het product van het verschil van de wortels met de som van de wortels: $a^2 = b^2 + (a + b)(a - b)$.
  Immers, $a = b + (a - b)$. Dan is
  $a^2 = b^2 + 2b(a - b) + (a - b)^2 = b^2 + (2b + a - b)(a - b) = b^2 + (a + b)(a - b)$

- Als opeenvolgende wortels samen een kwadraat zijn, dan is het kwadraat van de grootste wortel de som van de twee kwadraten. Bijvoorbeeld: $4 + 5 = 9$, dan $5^2 = 4^2 + 9$.
  Algemeen: als $n + (n + 1) = k^2$, dan $(n + 1)^2 = n^2 + k^2$.

- Als 4 maal de wortel een kwadraat is, dan is het kwadraat van de volgende wortel de som van twee kwadraten: die van 4 maal de wortel + kwadraat van de voorgaande wortel.
  Voorbeeld: $4 \cdot 9 = 36$; volgende wortel 10; $10^2 = 4 \cdot 9 + 8^2$.
  Als $4n = k^2$, dan is $(n + 1)^2 = k^2 + (n - 1)^2$

Stelling 3

Een andere manier om twee kwadraten te vinden met als som een kwadraat.

(Zie ook Euclides, boek 2, stelling 5)

Kies twee kwadraten m^2 en n^2, beide even of beide oneven, dan is $m^2 + n^2$ ook even.

$(\frac{1}{2}(m^2 + n^2))^2 = (\frac{1}{2}(m^2 - n^2))^2 + m^2n^2$

Bewijs:

Laat $p = \frac{1}{2}(m^2 + n^2)$ en $q = \frac{1}{2}(m^2 - n^2)$, dan geldt $p = q + n^2$

$$p^2 = q^2 + 2 \cdot q \cdot n^2 + n^2 \cdot n^2 = q^2 + (2q + n^2)n^2$$
$$= q^2 + (q + q + n^2)n^2 = q^2 + (p + q)n^2 = q^2 + m^2n^2$$

Stelling 4

De rij kwadraten ontstaat uit de geordende sommen van oneven getallen, die lopen van 1 tot oneindig.

Fibonacci laat zien hoe de rij van oneven getallen ontstaat uit de optelling van de rij van natuurlijke getallen en combineert dat met stelling 2.

$1 = 1^2$

$1^2 + 1 + 2 = 2^2$, dus $1^2 + 3 = 2^2$

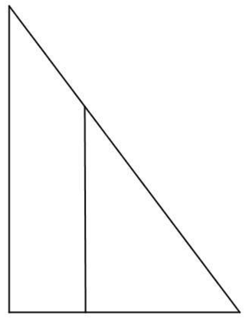
$2^2 + 2 + 3 = 3^2$, dus $2^2 + 5 = 3^2$

$3^2 + 3 + 4 = 4^2$, dus $3^2 + 7 = 5^2$

etc.

Stelling 5

Vind twee getallen zo, dat de som van hun kwadraten gelijk is aan een kwadraat dat de som is van twee andere kwadraten.



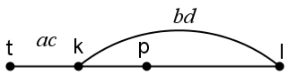
Fibonacci illustreert zijn bewijs met een driehoek van Pythagoras.
Stel je hebt een driehoek van Pythagoras met zijden 12, 5 en 13.

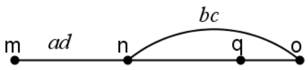
Kies een tweede rechthoek, bijvoorbeeld 15, 8, 17.
Verklein deze rechthoek zodat de hypotenusa 13 wordt.
Vermenigvuldig dus alle zijden met $\frac{13}{17}$.
De gevraagde getallen zijn $\frac{13}{17}\cdot 15 = 11\frac{8}{17}$ en $\frac{13}{17}\cdot 8 = 6\frac{2}{17}$

Stelling 6

Gegeven zijn vier getallen a, b, c en d met $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ en $a < b$ en $c < d$.
Het getal $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ is te schrijven als som van twee kwadraten van natuurlijke getallen en wel
- op twee manieren als $a^2 + b^2$ en $c^2 + d^2$ geen van beide een kwadraat zijn;
- op drie manieren als één van beide een kwadraat is;
- op vier manieren als beide een kwadraat zijn.

Hier een deel van het bewijs.
Te bewijzen: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2$





Kies $\underline{tk} = a \cdot c$, $\underline{kl} = b \cdot d$, $\underline{mn} = a \cdot d$ en $\underline{no} = b \cdot c$.
$\underline{kp} = \underline{tk}$ en $\underline{nq} = \underline{mn}$

Dan is te bewijzen:
$\underline{tl}^2 + \underline{qo}^2 = \underline{mn}^2 + \underline{pl}^2$ (= $a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$) = $\underline{tk}^2 + \underline{kl}^2 + \underline{mn}^2 + \underline{no}^2$

1 $\underline{tl}^2 = (\underline{tk} + \underline{kl})^2 = \underline{tk}^2 + \underline{kl}^2 + 2 \cdot \underline{tk} \cdot \underline{kl}$.
Dus blijft aan te tonen dat $2 \cdot \underline{tk} \cdot \underline{kl} + \underline{qo}^2 = \underline{mn}^2 + \underline{no}^2$

2 $\underline{tk} \cdot \underline{kl} = \underline{mn} \cdot \underline{no}$ (= $abcd$)

3 $\underline{mn} \cdot \underline{no} = \underline{mn} \cdot (\underline{nq} + \underline{qo}) = \underline{mn} \cdot \underline{nq} + \underline{mn} \cdot \underline{qo} = \underline{mn}^2 + \underline{mn} \cdot \underline{qo}$

4 $\underline{no} = \underline{mn} + \underline{qo}$;
$\underline{no}^2 = \underline{mn} \cdot \underline{no} + \underline{no} \cdot \underline{qo}$
$= \underline{mn} \cdot \underline{no} + (\underline{nq} + qo) \cdot \underline{qo}$
$= \underline{mn} \cdot \underline{no} + \underline{nq} \cdot \underline{qo} + \underline{qo}^2$

5 Uit (3): $\underline{mn}^2 + \underline{mn} \cdot \underline{qo} = \underline{mn} \cdot \underline{no}$
uit (4): $\underline{no}^2 = \underline{mn} \cdot \underline{no} + \underline{nq} \cdot \underline{qo} + \underline{qo}^2$
Optellen geeft:
$\underline{mn}^2 + \underline{no}^2 = \underline{mn} \cdot \underline{no} + \underline{mn} \cdot \underline{no} + \underline{qo}^2$ (bedenk $\underline{mn} = \underline{nq}$)

6 $\underline{qo}^2 + 2 \cdot \underline{mn} \cdot \underline{no} = \underline{qo}^2 + 2 \cdot \underline{tk} \cdot \underline{tl}$ (zie 2) $= \underline{mn}^2 + \underline{no}^2$ QED

Op analoge manier is te bewijzen dat $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ad+bc)^2+(bd-ac)^2$
Is $a^2 + b^2$ zelf een kwadraat, bijvoorbeeld k^2, dan heb je een derde mogelijkheid:
$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(kc)^2+(kd)^2$.
Is ook $c^2 + d^2$ een kwadraat, zeg m^2, dan krijg je ook $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ma)^2+(mb)^2$.

Stelling 7
Een derde manier om een pythagoreïsch drietal te vinden.
In deze stelling gebruikt Fibonacci stelling 6 om nieuwe pythagoreïsche drietallen te vinden.

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$$
$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ad+bc)^2+(bd-ac)^2$$

Kies nu a, b, c en d zo, dat $bc - ad = 0$, dus $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, dan volgt:
$(ac+bd)^2=(ad+bc)^2+(bd-ac)^2$

Voorbeeld
$a = 3$, $b = 4$, $c = 6$, $d = 8$ geeft $50^2 = 48^2 + 14^2$

Stelling 8
Vind twee kwadraten waarvan de som het kwadraat is van de som van de kwadraten van twee gegeven getallen.
$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ad+bc)^2+(bd-ac)^2$
Neem $c = a$ en $d = b$, dan vind je $(a^2+b^2)^2=(2ab)^2+(b^2-a^2)^2$

Stelling 9
Vind twee getallen waarvan de som van de kwadraten gelijk is aan een niet-kwadraat dat zelf de som is van twee kwadraten van twee gegeven getallen.
Gegeven de getallen c en d met $c^2 + d^2 = z$, z geen kwadraat.
Kies getallen a en b, zo, dat $a^2 + b^2 = e$, e een kwadraat, zeg f^2.
$i = f^2 \cdot z$.
Volgens stelling 6 is i te schrijven als som van twee kwadraten, zeg $i = p^2 + q^2$.
Dan voldoen de getallen $\frac{p}{f}$ en $\frac{q}{f}$.

Voorbeeld:
Gegeven getallen $c = 4$ en $d = 5$, dus $z = 41$
Neem $a = 3$ en $b = 4$, dus $e = 25$ en $f = 5$
Schrijf $i = 25 \cdot 41 = 1025$ als som van twee kwadraten, bijvoorbeeld $1025 = 32^2 + 1^2$
$p = 32$ en $q = 1$.
De getallen $\frac{32}{5}$ en $\frac{1}{5}$ voldoen.

Stelling 10

Van een rij van n opeenvolgende getallen, beginnend bij 1 is het product van het laatste getal met het volgende getal en de som van beide gelijk aan zes maal de som van de kwadraten van die getallen: $n(n + 1)(n + (n + 1)) = 6(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$.

Stel $u(n) = n(n + 1)(n + (n + 1))$, dan toont Fibonacci aan dat $S(n) = S(n-1) + 6n^2$:

$$\begin{aligned} u(n) = n(n + 1)(2n + 1) &= n(n - 1 + 2)(2n + 1) \\ &= n(n - 1)(2n + 1) + 2n(2n + 1) \\ &= n(n - 1)(2n - 1 + 2) + 2n(2n + 1) \\ &= n(n - 1)(2n - 1) + 2n(n - 1) + 2n(2n + 1) \\ &= u(n - 1) + 6n^2 \end{aligned}$$

Stelling 11

Van een rij van n opeenvolgende oneven getallen, beginnend bij 1 is het product van het laatste getal met het volgende oneven getal en de som van beide gelijk aan twaalf maal de som van de kwadraten van die getallen:

$n(n + 2)(n + (n + 2)) = 12(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + n^2)$

Hier een zelfde redenering als bij stelling 10.

Stelling 12

Zijn a en b relatief priem, $a + b$ even, *met* $a > b$*, dan is* $ab(a + b)(a - b)$ *deelbaar door 24.*

1 Uit a en b relatief priem, $a + b$ even, volgt dat a en b beide oneven zijn.
2 $a - b$ is even, dus $\frac{1}{2}(a-b)$ is geheel.
3 Stel $\frac{1}{2}(a-b)$ is oneven, dan is $\frac{1}{2}(a-b) + b = \frac{1}{2}(a+b)$ even
$a + b$ is dan deelbaar door 4 en $(a - b)(a + b)$ deelbaar door 8.
4 Stel $\frac{1}{2}(a-b)$ is even, dan is $a - b$ deelbaar door 4 en $(a - b)(a + b)$ deelbaar door 8.
5 Als a of b een drievoud zijn we klaar.
6 Stel a noch b een drievoud, dan zijn er twee mogelijkheden bij deling door 3
i a en b hebben dezelfde rest, dan is $a - b$ deelbaar door 3
ii a en b hebben verschillende rest, dan heeft de een rest 1 en de ander rest 2:
$a + b$ deelbaar door 3

Fibonacci wijst er op, dat als één van de getallen a of b even is, het product $4ab(a + b)(a - b)$ deelbaar is door 24, ook als a en b niet relatief priem zijn.

Stelling 13

Liggen rond een getal a evenveel getallen kleiner dan a als groter dan a en ligt elk groter getal even ver van a als een kleiner getal, dan is de som van al die getallen:
aantal getallen $\times a$.

Stelling 14 (De hoofdstelling van het boek)
Vind een getal dat opgeteld of afgetrokken van een kwadraat weer een kwadraat oplevert. (Het gevonden getal is het congruerende getal bij de congruente kwadraten).

Dus we moeten bij een getal N drie kwadraten x^2, y^2 en z^2 vinden, zodat
$x^2 + N = y^2$ en $y^2 + N = z^2$

Omdat elk kwadraat te schrijven is als de som van opeenvolgende oneven getallen, te beginnen met 1, is
$x^2 = 1 + 3 + \ldots + N_x$
$y^2 = 1 + 3 + \ldots + N_y$
$z^2 = 1 + 3 + \ldots + N_z$

De laatste reeks van oneven getallen is te verdelen in drie stukken:
$(1 + 3 + \ldots + N_x) + (\ldots + N_y) + (\ldots + N_z)$

Het tweede en derde stuk zijn gelijk aan N.
Het aantal oneven getallen in het tweede stuk staat in een zekere verhouding met het aantal oneven getallen in het derde stuk. In feite bevat het tweede stuk meer oneven getallen dan het derde, omdat het eerste stuk de kleinere oneven getallen bevat en het laatste stuk de grotere.

We zullen aantonen dat bij een mogelijke gegeven verhouding het congruerende getal N gevonden kan worden.

Kies twee getallen a en b, $b > a$.
We moeten nu twee hoeveelheden opeenvolgende oneven getallen vinden in de verhouding $b : a$ zodat de som van de getallen in elke hoeveelheid gelijk is aan N.

De som $a + b$ kan even of oneven zijn. We kiezen eerst $a + b$ even.
Dan is het verschil $b – a = a + b – 2a$ ook even.

We definiëren:
$\boldsymbol{e} = b(b - a)$, $\boldsymbol{i} = a(b - a)$, $\boldsymbol{m} = b(a + b)$, $\boldsymbol{l} = a(a + b)$

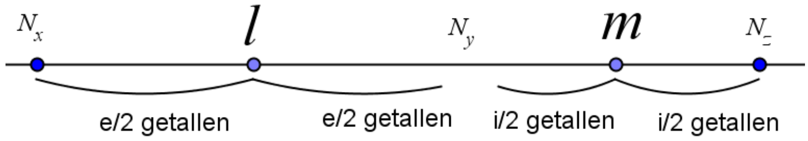
Deze getallen zijn allemaal even en $\frac{e}{i} = \frac{m}{l} = \frac{b}{a}$.

Ten slotte definiëren we
$\boldsymbol{p} = e \cdot l = ab(a + b)(b - a)$
$\boldsymbol{q} = i \cdot m = ab(a + b)(b - a)$

Ik zal laten zien dat p en q congruerende getallen zijn (Dus $N = p = q$)

In p zitten e getallen gelijk aan l. p is dus de som van e opeenvolgende oneven rond l, de helft kleiner dan l en de helft groter. Voorwaarde is wel dat $e < l$, dus $b(b – a) < a(a + b)$, dus
$\frac{b}{a} < \frac{a+b}{b-a}$.

Net zo is q de som van i opeenvolgende oneven getallen rond m, de helft kleiner dan m en de helft groter. Je hebt nu de volgende situatie:



Er geldt: $\dfrac{\text{aantal oneven getallen in } p}{\text{aantal oneven getallen in } q} = \dfrac{e}{i} = \dfrac{b}{a}$

De bewering is dat de twee hoeveelheden op elkaar aansluiten.
Immers $m - l = b(a + b) - a(a + b) = (b - a)(a + b)$.
Dus tussen m en l zitten $\frac{1}{2}b(a + b) - \frac{1}{2}a(a + b) = \frac{1}{2}(b - a)(a + b)$ oneven getallen.
En $\frac{1}{2}e + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}b(b-a) + \frac{1}{2}a(b-a) = \frac{1}{2}(a+b)(b-a)$.

We weten $N = p = q = ab(b^2 - a^2)$
Nu zijn x^2, y^2 en z^2 te berekenen.

Het aantal oneven getallen vanaf 1 kleiner dan l is $\frac{1}{2}l$.
Het aantal oneven getallen tot en met N_x is
$x = \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}e = \frac{1}{2}a(a+b) - \frac{1}{2}b(b-a) = \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + 2ab)$
$y^2 = x^2 + N$ en $z^2 = y^2 + N$

Voorbeeld (Fibonacci).

Kies $a = 3$ en $b = 5$.
(Aan de voorwaarden $a + b$ = even en $\dfrac{b}{a} < \dfrac{a+b}{b-a}$ - $\dfrac{5}{3} < \dfrac{8}{2} = 4$ - is voldaan.)
$N = 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 2 = 240$
$x = \frac{1}{2}(9 - 25 + 30) = 7$
Dus $x^2 = 49$, $y^2 = 289$ ($= 17^2$) en $z^2 = 529$ ($=23^2$).

Opmerkingen

1 De eis $\dfrac{b}{a} < \dfrac{a+b}{b-a}$ is alleen noodzakelijk bij de eis $x > 0$.
2 Fibonacci behandelt op soort gelijke wijze het geval $a + b$ is oneven.
Je vindt dan $N = 4ab(a + b)(b - a)$ en $x = a^2 - b^2 + 2ab$
3 In een commentaar van Heath op Diophantus stelling V.7 staat de stelling, dat in een rechthoekige driehoek geldt: (hypotenusa)$^2 \pm 4 \cdot$ oppervlakte = kwadraat.
Algebraïsch is dat gelijk aan $a^2 + b^2 \pm 2ab = (a \pm b)^2$ (in een driehoek met rechthoekszijden a en b geldt: (hypotenusa)$^2 = a^2 + b^2$ en de oppervlakte is $\frac{1}{2}ab$).

In een pythagoreïsche driehoek met $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ en $c = m^2 + n^2$ geeft dat:
$(m^2 + n^2)^2 \pm 4mn(m^2 - n^2) = (m^2 - n^2 \pm 2mn)^2$
Kies je hier $m = 2$ en $n = 1$, dan vind je: $25 + 24 = 49$ en $25 - 24 = 1$.
Voor $m = 4$ en $n = 1$ vind je het voorbeeld van Fibonacci.

Stelling 15

Als een congruerend getal en zijn congruente kwadraten vermenigvuldigd worden met een ander kwadraat, zal het nieuwe getal congruerend zijn bij de nieuwe kwadraten.

$x^2 + N = y^2$ en $y^2 + N = z^2$
Vermenigvuldigen we beide zijden van de vergelijkingen met een kwadraat, zeg u^2, dan krijgen we: $(xu)^2 + cu^2 = (uy)^2$ en $(yu)^2 + cu^2 = (zu)^2$

Stelling 16

Ik wil een congruerend getal vinden dat een kwadratisch veelvoud is van 5.

Laat een van twee gegeven getallen 5 zijn. Laat het andere een kwadraat zijn zo, dat de som van beide een kwadraat is en zo dat het grootste getal min het kleinste een kwadraat geeft.
Ik kies 4, want 5 + 4 = 9 en 5 – 4 = 1. Dus $a = 4$ en $b = 5$.
Hierbij hoort het congruerende getal $N = 4ab(a + b)(b - a)$
Nu zijn 4, a, $a + b$ en $b - a$ kwadraten, dus ook hun product. Het congruerende getal is dus een kwadraat maal 5 (namelijk $5 \cdot 144 = 720$).

Stelling 17 (het probleem van het boek)

Ik wil een kwadraat vinden dat vermeerderd of verminderd met 5 een kwadraat oplevert.

Kies weer $a = 4$, $b = 5$: $N = 720$. Bereken de congruente kwadraten:
$x = 4^2 - 5^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5 = 31$
$x^2 = 961$, $y^2 = 961 + 720 = 1681$ $(= 41^2)$ en $z^2 = 1681 + 720 = 2401$ $(= 49^2)$.

Deling van N en de kwadraten door 12^2 geeft: $N = 5$, $x = \frac{31}{12}$, $y = \frac{41}{12}$ en $z = \frac{49}{12}$.

Stelling 18

Als twee getallen een even som hebben, zal de verhouding van hun som tot hun verschil niet gelijk zijn aan de verhouding van het grotere getal tot het kleinere.

Bewezen moet worden dat voor twee natuurlijke getallen a en b geldt: $\frac{a+b}{b-a} \neq \frac{b}{a}$ $(b > a)$.

Fibonacci doet dat eerst voor getallen met een even som, daarna voor de getallen met een oneven som. Hier zijn bewijs voor een even som.
Stel $\frac{a+b}{b-a} = \frac{b}{a}$, dan is $a(a + b) = b(b - a)$.
$p = ab(a + b)(a - b)$ is dan een kwadraat, namelijk l^2 en de som van l opeenvolgende kwadraten van oneven getallen, te beginnen met 1, die rondom zich rondom l bevinden, dus van 1 tot en met N_y. q is de som van de oneven getallen vanaf N_y tot en met N_z.
Maar $q = p$ en dus een kwadraat. Dan zou er een kwadraat bestaan dat twee maal zo groot is als een kwadraat en dat kan niet.

In modern jargon kan het als volgt:
Uit $a(a + b) = b(b - a)$.volgt: $a^2 + ab = b^2 - ab$
$a^2 + 2ab + b^2 = 2b^2$, $(a + b)^2 = 2b^2$ en dat heeft geen oplossing in hele getallen.

Gevolg van de stelling is dat kwadraten geen congruerende getallen kunnen zijn.

Stelling 19

Ik wil een kwadraat vinden waarvoor geldt, dat de som van dat kwadraat plus zijn wortel een kwadraat is en waarvoor het verschil van dat kwadraat met zijn wortel een kwadraat is.
Dus gezocht een getal a zo, dat $a^2 + a$ en $a^2 - a$ kwadraten zijn.

Een toepassing van stelling 17.

Ga uit van drie congruente kwadraten: $x^2 + N = y^2$ en $y^2 + N = z^2$, dan
$y^2 - N = x^2$ en $y^2 + N = z^2$. Deel door N:

$\frac{y^2}{N} - 1 = \frac{x^2}{N}$ en $\frac{y^2}{N} + 1 = \frac{z^2}{N}$ Vermenigvuldig met $\frac{y^2}{N}$:

$$\left(\frac{y^2}{N}\right)^2 - \frac{y^2}{N} = \left(\frac{xy}{N}\right)^2 \text{ en } \left(\frac{y^2}{N}\right)^2 + \frac{y^2}{N} = \left(\frac{zy}{N}\right)^2$$

Stelling 20

Vind een kwadraat zo, dat dat kwadraat vermeerderd of verminderd met tweemaal zijn wortel weer een kwadraat is.
Dus gezocht een getal a zo, dat $a^2 + 2a$ en $a^2 - 2a$ kwadraten zijn.

Op soortgelijke manier als in stelling 19:
$y^2 - N = x^2$ en $y^2 + N = z^2$. Deel nu door $\frac{1}{2}N$.

$\frac{2y^2}{N} - 2 = \frac{2x^2}{N}$ en $\frac{2y^2}{N} + 2 = \frac{2z^2}{N}$ Vermenigvuldig met $\frac{2y^2}{N}$:

$$\left(\frac{2y^2}{N}\right)^2 - \frac{2y^2}{N} = \left(\frac{2xy}{N}\right)^2 \text{ en } \left(\frac{2y^2}{N}\right)^2 + \frac{2y^2}{N} = \left(\frac{2zy}{N}\right)^2$$

Stelling 21

Voor elke drie opeenvolgende oneven kwadraten geldt, dat het grootste kwadraat min het middelste kwadraat acht meer is dan het middelste kwadraat min het kleinste kwadraat.
$n^2, (n + 2)^2, (n + 4)^2$
$(n + 4)^2 - (n + 2)^2 = n^2 + 8n + 16 - n^2 - 4n - 4 = 4n + 12$
$(n + 2)^2 - n^2 = n^2 + 4n + 4 - n^2 = 4n + 4$

Opmerking
1 De stelling geldt voor alle natuurlijke getallen.
2 Gevolg: je kunt de rij van oneven kwadraten als volgt krijgen:
$1 + 8 = 9$, $9 + 16 = 25$, $25 + 24 = 49$, ………
$(2n - 1)^2 = 1 + 8 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 8 + \ldots + (n - 1) \cdot 8$

Stelling 22

Ik wil in een gegeven verhouding de twee verschillen tussen drie kwadraten vinden.
Bij een gegeven verhouding $a : b$ moeten drie kwadraten x^2, y^2 en z^2 gevonden worden zo, dat $\frac{y^2 - x^2}{z^2 - y^2} = \frac{a}{b}$.

Fibonacci bekijkt eerst het geval dat a en b opeenvolgende getallen zijn: $b = a + 1$ aan de hand van twee voorbeelden en gebruikt zijn vondst in gevolg 2 van stelling 21.

$a = 3$, $b = 4$

Zet achter 1 een rij van b opeenvolgende oneven getallen: 3, 5, 7, 9
Neem de kwadraten van deze getallen: 9, 25, 49 en 81
$9 = 1 + 8$, $25 = 9 + 2 \cdot 8$, $49 = 25 + 3 \cdot 8$ en $81 = 49 + 4 \cdot 8$.

Kijk naar de laatste twee: $49 - 25 = 3 \cdot 8$ en $81 - 49 = 4 \cdot 8$, dus $\frac{49-25}{81-49} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 8} = \frac{3}{4}$

$a = 10$, $b = 11$
Het elfde oneven getal na 1 is 23; $23^2 = 21^2 + 11 \cdot 8$ en $21^2 = 19^2 + 10 \cdot 8$
$\frac{21^2 - 19^2}{23^2 - 21^2} = \frac{10 \cdot 8}{11 \cdot 8} = \frac{10}{11}$

Daarna bespreekt Fibonacci het geval dat a en b opeenvolgende oneven getallen zijn en het geval dat a en b kwadraten zijn.

Stelling 23

Ik wil drie kwadraten vinden zo, dat zowel de som van de eerste twee als de som van alle drie kwadraten zijn.
Gezocht: x^2, y^2 en z^2, zodat $x^2 + y^2$ en $x^2 + y^2 + z^2$ kwadraten zijn

Fibonacci bespreekt hier een aantal voorbeelden.

Hij begint met een pythagoreïsch drietal: $x = 3$, $y = 4$ en $z = 5$.
Dan neemt hij de som van alle oneven getallen kleiner dan $5^2 = 25$.
Dat is natuurlijk een kwadraat: 144 en $144 + 25 = 169$.
De som van de oneven getallen tot en met 167 is 84^2; $84^2 + 13^2 = 85^2$.
Net zo $3612^2 + 85^2 = 3613^2$

Stelling 24
Ik wil drie getallen vinden die opgeteld bij het kwadraat van het eerste getal een kwadraat opleveren. Bovendien moet dit kwadraat opgeteld bij het kwadraat van het tweede getal een kwadraat geven. En als bij dit kwadraat het kwadraat van het derde getal wordt geteld, moet het resultaat weer een kwadraat zijn.

Gezocht: drie getallen x, y en z zo, dat
$x + y + z + x^2 = A^2$, $A^2 + y^2 = B^2$ en $B^2 + z^2 = C^2$

Fibonacci begint met twee pythagoreïsche drietallen (6, 8, 10) en (10, 24, 26) zodat aan de laatste twee vergelijkingen voldaan is. Dus $A = 6$, $y = 8$, $B = 10$, $z = 24$ en $C = 26$
Ingevuld in de eerste vergelijking geeft dat:

$x^2 + x + 32 = 36$ ofwel $x^2 + x = 4$, dus $x^2 + x + \frac{1}{4} = 4\frac{1}{4}$, $(x+\frac{1}{2})^2 = 4\frac{1}{4}$ en $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{4\frac{1}{4}}$.
Maar hij wil een oplossing in rationale getallen.

Uit $x^2 + x + 32 = A^2$ volgt $A^2 – 32 = x(x + 1)$
Met $A = 6$ lukt het niet, dus gaat hij op zoek naar een getal A zo dat $A^2 – 32$ te schrijven is als $x(x + 1)$ met x rationaal.

Daartoe bewijst hij eerst een hulpstelling:
Neem $x^2 – kx$. Als je k splitst in twee getallen m en n die 1 verschillen, dan is $x^2 - kx + mn$ te schrijven in de vorm $n(n + 1)$. Immers $m = \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}$ en $n = \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}$ en

$$x^2 - kx + (\tfrac{1}{2}k - \tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}k + \tfrac{1}{2}) = x^2 - kx + \tfrac{1}{4}k^2 - \tfrac{1}{4} = (x - \tfrac{1}{2}k)^2 - \tfrac{1}{4} =$$
$$(x - \tfrac{1}{2}k - \tfrac{1}{2})(x - \tfrac{1}{2}k + \tfrac{1}{2})$$

Uitgaande van $A = 6$ is $32 = 5\frac{1}{3} \cdot A$. Dus $x^2 + x = A^2 – 5\frac{1}{3} \cdot A$.
Kies nu een getal groter dan $5\frac{1}{3}$, bijvoorbeeld 7.
Bekijk $A^2 – 7A$. 7 is te splitsen in 3 en 4, product 12. Dan is volgens de hulpstelling $A^2 – 7A + 12$ wel te schrijven als $x(x + 1)$.
Dus laat $A^2 – 5\frac{1}{3} \cdot A = A^2 – 7A + 12$. Dat geeft $A = 7\frac{1}{5} = 1\frac{1}{5} \cdot 6$
Vermenigvuldig nu y en z ook met $1\frac{1}{5}$. Dat geeft de getallen $1\frac{1}{5} \cdot 8 = 9\frac{3}{5}$ en $1\frac{1}{5} \cdot 24 = 28\frac{4}{5}$.

$x(x + 1) = A^2 – 5\frac{1}{3} \cdot A = 13\frac{11}{25}$, $(x+\frac{1}{2})^2 = \dfrac{1369}{100} = \left(\dfrac{37}{10}\right)^2$, dus $x = 3\frac{1}{5}$.
en daarmee is het probleem opgelost in rationale getallen.

Fibonacci vindt ook nog een oplossing in gehele getallen: $x = 35$, $y = 144$ en $z = 360$
En kan er kennelijk geen genoeg van krijgen, want hij lost het probleem ook op voor vier getallen x, y, z en r zo dat
$x + y + z + r + x^2 = A^2$, $A^2 + y^2 = B^2$, $B^2 + z^2 = C^2$ en $C^2 + r^2 = D^2$
en vind: x $x = 1295$, $y = 4566\frac{6}{7}$, $z = 11417\frac{1}{7}$ en $r = 79920$.

Geraadpleegde literatuur

Steentjeswiskunde
A.W. Grootendorst: Grepen uit de geschiedenis van de wiskunde, Delft, 1988
ISBN 90 6562 094 X

Derde machten
G.H. Hardy en E.M Wright, An introduction to the theory of numbers, Oxford
A. van den Brandhof over Taxicabgetallen op kennislink:
http://www.kennislink.nl/publicaties/de-geheimen-van-taxinummers

De Arithmetika van Diophantus
T.L. Heath, Diophantos van Alexandrië, A study in the history of Greek algebra, Cambridge, 1885

Sommen van kwadraten
F. Beukers, Getaltheorie voor beginners, Epsilon, Utrecht, 1999, ISBN 90 5041-049-9

Liber Quadratorum
L.E. Sigler, The Book of Squares, een Engelse (uitvoerig) becommentarieerde vertaling van het Liber Quadratorum van Fibonacci, Academic Press, USA, 1987